

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2019-2020

Dæmablað 4

Dæmin eru úr talnafræði og fylgir lesefni með.

Dæmi 25.

Hver er þriðja minnsta náttúrlega talan, sem er oddatala og er deilanleg með nákvæmlega 12 náttúrlegum tölum?

Dæmi 26.

Sannið að eina talan, sem einungis er sett saman úr tölustafnum 1 og rita má sem summu tveggja kvaðrata (ferningstalna), er talan 1. (Þ.e. ekki er unnt að rita 11, 111, 1111, o.s.frv. sem summu tveggja kvaðrata.)

Dæmi 27.

Sýnið að margfeldi fimm náttúrlegra talna í röð sé aldrei ferningstala (annað veldi af heilli tölu).

Dæmi 28.

Látum p tákna frumtölu og setjum $M_p = 2^p - 1$.

a) Kannið hvort M_p er frumtala (prímatala) fyrir $p = 2, 3, 5, 7$ og 11.

b) Gerum ráð fyrir að M_p sé frumtala og látum x vera töluna $2^{p-1}M_p$. Er það þá rétt, að summa allra talna sem ganga upp í x sé $2x$?

Dæmi 29.

Ef valin er $n+1$ tala úr menginu $\{1, 2, \dots, 2n\}$ skal sanna að meðal þeirra séu alltaf einhverjar tvær tölur, þannig að önnur gangi upp í hinni.

Dæmi 30.

Fyrir náttúrlega tölu n , látum við $\sigma(n)$ tákna summu jákvæðra deila tölunnar n og $\tau(n)$ tákna fjölda þessara deila. Sýnið að ef $\sigma(n)$ er frumtala þá sé $\tau(n)$ frumtala.

Dæmi 31.

Sannið að fyrir sérhverja jákvæða heila tölu n eru til n jákvæðar heilar tölur í röð þannig að engin þeirra sé heiltöluveldi af frumtölu.

Dæmi 32.

Látum n tákna samsetta tölu, þ.e. tölu (jákvæða og heila) sem má þátta á a.m.k. tvo mismunandi vegu, $n = ab$ og $n = cd$ (annar möguleikinn gæti verið $1 \cdot n$). Sýnið að í slíku tilviki sé talan $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ örugglega ekki frumtala.